آزمون شبیه‌ساز نهایی درس: **گسسته**	ساعت شروع:	تاریخ امتحان: **۱۴۰۲/۱۰/۰۷**	مدت امتحان: **۴۰ دقیقه**
نام و نام خانوادگی:	رشته: **ریاضی فیزیک**	پایهٔ **دوازدهم** دورهٔ متوسطه	تعداد صفحات: **۲ صفحه**
آزمون شبیه‌ساز امتحان نهایی		**گروه آموزشی ماز**	

ردیف	سؤالات (پاسخ‌برگ دارد) [استفاده از ماشین حساب ساده مجاز می‌باشد]	نمره
۱	درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید. الف) حاصل‌جمع یک عدد گویا و یک عدد گنگ، عددی گنگ است. ب) معادله هم‌نهشتی $ax \overset{m}{\equiv} b$ دارای جواب است، اگر و تنها اگر $(a,b)\|m$. پ) تعداد رأس‌های فرد هر گراف، عددی فرد است. ت) اگر G یک گراف n رأس باشد، مقدار $q(G)+q(\bar{G})$ برابر $\frac{n(n-۱)}{۲}$ است.	۱
۲	الف) حاصل $[۱۲۰,(۷۲,۴۸)]$ برابر .... است. ب) اگر در یک سال، اول مهرماه شنبه باشد، در این صورت، ۲۱ دی ماه در همان سال، روز .... است. پ) گرافی را که بین هر دو رأس آن حداقل یک مسیر وجود داشته باشد، گراف .... می‌گوییم. ت) در یک گراف k− منتظم، ماکزیمم درجه رأس برابر .... است.	۱/۵
۳	برای هر دو عدد حقیقی و مثبت x و y، به روش بازگشتی (گزاره‌های هم‌ارز) نشان دهید: $\frac{۱}{\sqrt{x}}+\frac{۱}{\sqrt{y}} \ge \frac{۴}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$	۱/۲۵
۴	هر یک از گزاره‌های زیر را اثبات و یا با ارائهٔ مثال نقض آن‌ها را رد کنید. الف) برای هر عدد طبیعی n، عدد $۲^n+۱$ اول است. ب) اگر از مربع عددی فرد یک واحد کم کنیم، حاصل همواره بر ۸ بخش‌پذیر است.	۱
۵	اگر عدد طبیعی a، دو عدد $(۷+۹k)$ و $(۶+۷k)$ را عاد کند، مقدار a را بیابید.	۱/۵
۶	اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم a بر ۵ و ۶ به‌ترتیب برابر ۲ و ۳ باشد، باقی‌ماندهٔ تقسیم a بر ۳۰ را محاسبه کنید.	۱/۵
۷	ثابت کنید حاصل‌ضرب سه عدد صحیح متوالی همواره بر !۳ بخش‌پذیر است.	۱/۵
۸	باقی‌ماندهٔ تقسیم $(۱۹+۳۸^{۳۶})$ را بر ۴ به‌دست آورید.	۱/۲۵
۹	ثابت کنید دو طرف یک رابطهٔ هم‌نهشتی را می‌توان به توان عدد طبیعی n رساند، به‌عبارت دیگر برای اعداد صحیح a، b و اعداد طبیعی n و m، اگر $a \overset{m}{\equiv} b$، آن‌گاه $a^n \overset{m}{\equiv} b^n$.	۱
۱۰	اگر دو عدد $(۵-۳a)$ و $(۷-۴a)$ رقم یکان برابر داشته باشند، رقم یکان عدد $(۶+۹a)$ را به‌دست آورید.	۱
۱۱	ثابت کنید باقی‌ماندهٔ تقسیم هر عدد بر ۹، با باقی‌ماندهٔ تقسیم مجموع ارقام آن عدد بر ۹ برابر است.	۱/۲۵
	ادامهٔ سؤالات در صفحهٔ بعد	

آزمون شبیه‌ساز نهایی درس: **گسسته**	ساعت شروع:	تاریخ امتحان: **۱۴۰۲/۱۰/۰۷**	مدت امتحان: **۴۰ دقیقه**
نام و نام خانوادگی:	رشته: **ریاضی فیزیک**	پایهٔ **دوازدهم** دورهٔ متوسطه	تعداد صفحات: **۲ صفحه**
آزمون شبیه‌ساز امتحان نهایی		**گروه آموزشی ماز**	

ردیف	سؤالات (پاسخ‌برگ دارد) [استفاده از ماشین حساب ساده مجاز می‌باشد]	نمره
۱۲	همهٔ اعداد صحیح چون a را بیابید که ۵ برابر آن‌ها به‌علاوهٔ ۹ بر ۱۱ بخش‌پذیر باشد.	۱
۱۳	معادلهٔ سیالهٔ $۹x+۱۳y=۷۲۵$ را حل کرده و جواب عمومی آن را بنویسید.	۱/۵
۱۴	در گراف G، با فرض $V(G)=\{a,b,c,d,e,f\}$ و $E(G)=\{ab,be,ec,cd,da,ac\}$ مطلوب است: الف) نمودار گراف G را رسم کنید. ب) حاصل $(۳p-\delta+\Delta-۲q)$ را به‌دست بیاورید. پ) مجموعهٔ $N_G[c]$ را با اعضا بنویسید. ت) مسیری به طول ۴ از d به c بنویسید. ث) دوری به طول ۵ با شروع از رأس a بنویسید. ج) مکمل گراف G را رسم کنید. چ) حاصل $\sum \deg_{\bar{G}} + q(\bar{G})$ را به‌دست آورید. هـ) آیا گراف G همبند است؟ (با ذکر دلیل)	۲/۷۵
۱۵	گراف G، ۳-منتظم است و اندازهٔ آن ۳ واحد کمتر از ۲ برابر تعداد رأس‌های گراف است. مرتبهٔ این گراف را به‌دست آورید.	۱
	موفق باشید.	۲۰

آزمون شبیه‌ساز نهایی درس: **گسسته**	ساعت شروع:	تاریخ امتحان: **۱۴۰۲/۱۰/۰۷**	مدت امتحان: **۴۰ دقیقه**
نام و نام خانوادگی:	رشته: **ریاضی فیزیک**	پایهٔ **دوازدهم** دورهٔ متوسطه	تعداد صفحات: **۱۳ صفحه**
آزمون شبیه‌ساز امتحان نهایی		**گروه آموزشی ماز**	

ردیف	پاسخ‌نامه	نمره
۱	مصحح شو:	۱

الف) درست (۰/۲۵) ب) نادرست (۰/۲۵) پ) نادرست (۰/۲۵) ت) درست (۰/۲۵)

بررسی دقیق‌تر:

الف) فرض کنید $r \in \mathbb{Q}$ و $x \in \mathbb{Q}'$، می‌خواهیم ثابت کنیم که $x + r \in \mathbb{Q}'$ است. به کمک برهان خلف داریم:

فرض خلف: $r + x \not\in \mathbb{Q}'$، به عبارت دیگر: $r + x \in \mathbb{Q}$

می‌دانیم که تفاضل دو عدد گویا، عددی گویا است، پس:

$$\begin{cases} r + x \in \mathbb{Q} \\ r \in \mathbb{Q} \end{cases} \Rightarrow (r + x) - r \in \mathbb{Q} \Rightarrow x \in \mathbb{Q}$$

از طرفی، طبق اطلاعات اولیه، می‌دانیم که $x \in \mathbb{Q}'$ است و گزاره حاصل شده یعنی $x \in \mathbb{Q}$، با فرض ما، در تناقض است، بنابراین، فرض خلف باطل است و حکم اثبات می‌گردد.

ب) قضیه: معادله هم‌نهشتی $ax \overset{m}{\equiv} b$ دارای جواب است، اگر و فقط اگر $(a,m) | b$

پ) توجه داشته باشید که تعداد رأس‌های فرد هر گراف، عددی زوج است.

اثبات به روش برهان خلف:

برهان خلف نوعی اثبات غیرمستقیم است که در آن فرض می‌کنیم که حکم نادرست باشد و سپس با استفاده از قوانین منطق گزاره‌ها و استدلال‌های درست و مبتنی بر فرض، به یک نتیجه غیرممکن و یا نتیجه‌ای متضاد با فرض مسئله می‌رسیم و در نهایت معلوم می‌شود که فرض نادرست بودن حکم، باطل است و درستی حکم ثابت می‌گردد.

مثال: اگر α و β دو عدد گنگ باشند، ولی $\alpha + \beta$ گویا باشد، ثابت کنید $\alpha - \beta$ گنگ است.

فرض خلف: فرض می‌کنیم $\alpha - \beta$ گویا باشد.

می‌دانیم جمع دو عدد گویا، عددی گویا است، پس: $(\alpha + \beta) + (\alpha - \beta) \in \mathbb{Q} \Rightarrow ۲\alpha \in \mathbb{Q} \Rightarrow \alpha \in \mathbb{Q}$

از طرفی، طبق فرض مسئله می‌دانیم که α عددی گنگ است که با نتیجه فوق $(\alpha \in \mathbb{Q})$ در تناقض است، لذا فرض خلف باطل و حکم اثبات می‌شود.

ردیف	پاسخ‌نامه	نمره
۲	مصحح شو:	۱/۵

الف) ۱۲۰ (۰/۵) ب) پنجشنبه (۰/۵) پ) همبند (۰/۲۵) ت) k (۰/۲۵)

بررسی دقیق‌تر:

الف)

$$\begin{cases} ۷۲ = ۲^۳ \times ۳^۲ \\ ۴۸ = ۲^۴ \times ۳ \\ ۱۲۰ = ۲^۳ \times ۳ \times ۵ \end{cases}$$

$$\begin{array}{r|l} ۱۲۰ & ۲ \\ ۶۰ & ۲ \\ ۳۰ & ۲ \\ ۱۵ & ۳ \\ ۵ & ۵ \\ ۱ & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} ۴۸ & ۲ \\ ۲۴ & ۲ \\ ۱۲ & ۲ \\ ۶ & ۲ \\ ۳ & ۳ \\ ۱ & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} ۷۲ & ۲ \\ ۳۶ & ۲ \\ ۱۸ & ۲ \\ ۹ & ۳ \\ ۳ & ۳ \\ ۱ & \end{array}$$

$(۷۲,۴۸) = ۲^۳ \times ۳ = ۲۴$

حال، برای محاسبه $[۲۴,۱۲۰]$ داریم: $[۲۴,۱۲۰] = ۲^۳ \times ۳ \times ۵ = ۱۲۰$

ب) فاصله ۱ مهر تا ۲۱ دی برابر است با:

۱۱۰ = (۲۱ روز در دی) + (۳۰ روز آذر) + (۳۰ روز آبان) + (۲۹ روز در مهر)

از طرفی، $۱۱۰ \overset{۷}{\equiv} ۵$ است، بنابراین طبق جدول زیر، ۲۱ دی ماه، پنجشنبه است.

ج	پ	چ	س	د	ی	ش
۶	۵	۴	۳	۲	۱	۰

بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک (ب.م.م):

۱) عدد طبیعی d را ب.م.م دو عدد صحیح a و b می‌نامیم (a و b هر دو با هم صفر نیستند) و می‌نویسیم $(a,b)=d$ ، هرگاه دو شرط زیر برقرار باشند:

- $d|a, d|b$
- $\forall m>0; m|a, m|b \Rightarrow m\le d$

۲) اگر $a|b$ ، داریم: $(a,b)=|a|$

۳) اگر p عددی اول باشد و $a\in\mathbb{Z}$ و $p\nmid a$ ، داریم $(p,a)=1$

۴) اگر p و q هر دو اول باشند و $p\neq q$ باشد، داریم: $(p,q)=1$

۵) هر دو عدد صحیح و متوالی نسبت به هم اول هستند، ببینید:

$$(m,m+1)=d\Rightarrow\begin{cases}d|m\\ d|m+1\end{cases}\xrightarrow[\text{سمت راست}]{-}d|1\Rightarrow d=1$$

۶) دو عدد صحیح و فرد متوالی نسبت به هم اول هستند، ببینید:

$$(2n-1,2n+1)=d\Rightarrow\begin{cases}d|2n-1\\ d|2n+1\end{cases}\xrightarrow[\text{سمت راست}]{-}d|2\Rightarrow d=1 \text{ یا } d=2$$

از طرفی، چون $2n+1$ (یا $2n-1$) عددی فرد است و یک عدد زوج نمی‌تواند یک عدد فرد را بشمارد $2\nmid 2n+1$ ، بنابراین $d=2$ غیرقابل قبول است.

مثال: اگر m عددی صحیح است، حاصل $(2m,6m^3)$ را بیابید.

$$2m|6m^3\Rightarrow(2m,6m^3)=|2m|$$

مثال: اگر a عددی طبیعی باشد، حاصل $(5a+4,2a+3)$ را به‌دست آورید.

$$(5a+4,2a+3)=d$$

$$\begin{matrix}d|5a+4\xrightarrow[\text{سمت راست}]{\times 2}d|10a+8\\ d|2a+3\xrightarrow[\text{سمت راست}]{\times 5}d|10a+15\end{matrix}\xrightarrow[\text{سمت راست}]{(-)}d|7\Rightarrow d=1 \text{ یا } d=7$$

کوچک‌ترین مضرب مشترک (ک.م.م):

۱) عدد طبیعی c را ک.م.م دو عدد صحیح و ناصفر a و b می‌نامیم می‌نویسیم $[a,b]=c$، هر گاه دو شرط زیر برقرار باشند:

- $a|c, b|c$
- $\forall m>0; a|m, b|m\Rightarrow c\le m$

۲) اگر $a|b$ داریم: $[a,b]=|b|$

مثال: حاصل موارد زیر را به‌دست آورید. $(m\in\mathbb{Z})$

- $([m^2,m],m^5)$

چون $m|m^2$ ، داریم:

$$[m^2,m]=|m^2|=m^2$$

حال باید حاصل (m^2,m^5) را به‌دست بیاوریم. می‌دانیم که $m^2|m^5$ ، پس:

$$(m^2,m^5)=|m^2|=m^2$$

- $[m^7,(m^2,m^3)]$

چون $m^2|m^3$ ، در نتیجه:

$$(m^2,m^3)=|m^2|=m^2$$

حال باید حاصل $[m^7,m^2]$ را بیابیم. می‌دانیم که $m^2|m^7$ ، پس:

$$[m^7,m^2]=|m^7|$$

۳ — ۱/۲۵

مصحح شو:

$$\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{y}}\geq\frac{4}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\frac{\sqrt{y}+\sqrt{x}}{\sqrt{x}\sqrt{y}}\geq\frac{4}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}}_{(0/25)} \xleftrightarrow[\text{طرفین وسطین}]{x,y>0} \underbrace{(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2\geq 4\sqrt{xy}}_{(0/25)}$$

$$\Leftrightarrow x+y+2\sqrt{xy}\geq 4\sqrt{xy} \Leftrightarrow \underbrace{x+y-2\sqrt{xy}\geq 0}_{(0/25)} \Leftrightarrow \underbrace{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2\geq 0}_{(0/25)}$$

گزاره فوق، یک گزاره همیشه درست است. (۰/۲۵)

اثبات به روش بازگشتی:

در این روش، از حکم مسئله شروع می‌کنیم و با فرض درستی حکم، به یک رابطه بدیهی یا فرض مسئله می‌رسیم. در استفاده از این روش، برای ساده کردن حکم مسئله از گزاره‌های دوشرطی استفاده می‌کنیم.

توجه: گزاره دو شرطی $A \Leftrightarrow B$، زمانی درست است که گزاره‌های A و B هم‌ارزش باشند.

مثال: به روش بازگشتی، ثابت کنید اگر $a>0$، آن‌گاه $a+\frac{1}{a}\geq 2$ است.

$a+\frac{1}{a}\geq 2 \Leftrightarrow a^2+1\geq 2a \Leftrightarrow a^2-2a+1\geq 0 \Leftrightarrow (a-1)^2\geq 0 \rightarrow$ همواره برقرار است.

مثال: به روش بازگشتی، ثابت کنید حاصل‌ضرب هر دو عدد حقیقی، کوچک‌تر یا مساوی نصف مجموع مربعات آن‌ها است.

$xy\leq\frac{x^2+y^2}{2} \Leftrightarrow 2xy\leq x^2+y^2 \Leftrightarrow x^2+y^2-2xy\geq 0 \Leftrightarrow (x-y)^2\geq 0 \rightarrow$ همواره درست

مثال: برای هر سه عدد حقیقی x و y و z ثابت کنید: $x^2+y^2+z^2\geq xy+yz+xz$

$$x^2+y^2+z^2\geq xy+yz+xz \Leftrightarrow 2x^2+2y^2+2z^2\geq 2xy+2yz+2xz$$

$$\Leftrightarrow (x^2+y^2-2xy)+(y^2+z^2-2yz)+(x^2+z^2-2xz)\geq 0$$

$\Leftrightarrow (x-y)^2+(y-z)^2+(x-z)^2\geq 0 \rightarrow$ همواره درست

مثال: ثابت کنید میانگین حسابی دو عدد نامنفی از میانگین هندسی آن‌ها کم‌تر نیست.

اگر دو عدد a و b نامنفی باشند، حکم مسئله برابر است با: $\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$

$$\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab} \Leftrightarrow a+b\geq 2\sqrt{ab} \Leftrightarrow a+b-2\sqrt{ab}\geq 0 \Leftrightarrow (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\geq 0$$

گزاره فوق همیشه درست است.

۴ — ۱

مصحح شو:

الف) این گزاره نادرست. (۰/۲۵) $n=3$: مثال نقض (۰/۲۵)

ب) این گزاره درست است. (۰/۲۵)

$$a=2k+1 \Rightarrow a^2=(2k+1)^2$$

$$a^2-1=(2k+1)^2-1=(4k^2+4k+1)-1=4k^2+4k=4\underbrace{k(k+1)}_{2q}=8q$$

اثبات گزارهٔ «ب»؛ (۰/۲۵) نمره دارد.

اثبات با در نظر گرفتن همه حالت‌ها:

گاهی برای اثبات یک گزاره لازم است که همه موارد ممکن در مورد مسئله را در نظر بگیریم.

مثال: ثابت کنید برای هر عدد طبیعی n، n^2-5n+7 عددی فرد است.

دو حالت ممکن است رخ دهد:

الف) n زوج است.

$$n = 2k \Rightarrow n^2 - 5n + 7 = (2k)^2 - 5(2k) + 7 = 2(2k^2 - 5k + 3) + 1 = 2q + 1$$

ب) n فرد است.

$$n = 2k - 1 \Rightarrow n^2 - 5n + 7 = (2k-1)^2 - 5(2k-1) + 7 = 4k^2 - 14k + 13 = 2(2k^2 - 7k + 6) + 1 = 2q + 1$$

که در هر دو حالت، حاصل یک عدد فرد است.

۵ — ۱/۵

مصحح شو:

$$\left.\begin{array}{l} a \mid 7k+6 \xrightarrow{\times 9} a \mid 63k+54 \ (0/25) \\ a \mid 9k+7 \xrightarrow{\times 7} a \mid 63k+49 \ (0/25) \end{array}\right\} \xrightarrow{(-)} a \mid (63k+54) - (63k+49) \ (0/25)$$

$$\Rightarrow \underset{(0/25)}{a \mid 5} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \ (0/25) \\ a = 5 \ (0/25) \end{cases}$$

بخش‌پذیری:

عدد صحیح b را بر عدد صحیح و مخالف صفر a بخش‌پذیر گوییم هرگاه عدد صحیحی مانند q وجود داشته باشد به طوری که: $b = aq$

$a \mid b$ یعنی:
- عدد a، شمارنده عدد b است.
- عدد a، عدد b را می‌شمارد.
- b بر a بخش‌پذیر است.
- b مضرب a است.
- a، مقسوم‌علیه b است.

ویژگی‌های رابطه عاد کردن:

$$\bullet\, a \mid b \Rightarrow \begin{cases} a \mid -b \\ -a \mid b \\ -a \mid -b \end{cases}$$

$\bullet\, a \mid b \Rightarrow a \mid mb$ $\quad\bullet\, a \mid b \Rightarrow a \mid b^n \,;(n \in \mathbb{N})$ $\quad\bullet\, a \mid b \wedge b \mid c \Rightarrow a \mid c$

$\bullet\, a \mid b \wedge a \mid c \Rightarrow a \mid b \pm c \xrightarrow{\text{تعمیم}} a \mid b \wedge a \mid c \Rightarrow a \mid mb \pm nc$

$\bullet\, a \mid b \xrightarrow{b \neq 0} |a| \le |b| \xrightarrow{\text{نتیجه}} a \mid b \wedge b \mid a \Rightarrow a = \pm b$

$\bullet\, a \mid b \Rightarrow a^n \mid b^n$ $\quad\bullet\, a \mid b \wedge c \mid d \Rightarrow ac \mid bd$ $\quad\bullet\, a \mid b \xrightarrow{n \le m} a^n \mid b^m$

مثال: اگر عددی مانند k در $\mathbb{Z}$ باشد به طوری که $5 \mid 4k+1$، ثابت کنید: $25 \mid 16k^2 + 28k + 6$

$$\left.\begin{array}{l} 5 \mid 4k+1 \xrightarrow{\text{به توان ۲}} 25 \mid 16k^2 + 8k + 1 \\ 5 \mid 4k+1 \xrightarrow{\times 5} 25 \mid 20k + 5 \end{array}\right\} \xrightarrow{+} 25 \mid 16k^2 + 28k + 6$$

نکته:

ـ هر عدد طبیعی و بزرگ‌تر از یک که هیچ شمارنده مثبتی به جز یک و خودش نداشته باشد عدد اول نامیده می‌شود.

مجموعه اعداد اول: $P = \{2, 3, 5, 7, 11, \ldots\}$

ـ اگر p عددی اول و a عددی طبیعی بوده و $a \mid p$، داریم: $a = 1$ یا $a = p$

۶ — ۱/۵

مصحح شو:

$$a=۵q_۱+۲ \quad (۰/۲۵) \xrightarrow{\times ۶} ۶a=۳۰q_۱+۱۲ \quad (۰/۲۵)$$

$$a=۶q_۲+۳ \quad (۰/۲۵) \xrightarrow{\times ۵} ۵a=۳۰q_۲+۱۵ \quad (۰/۲۵)$$

طرفین روابط بالا را از هم کم می‌کنیم:

$$۶a-۵a=(۳۰q_۱+۱۲)-(۳۰q_۲+۱۵) \Rightarrow a=۳۰q_۱-۳۰q_۲+۱۲-۱۵$$

$$\Rightarrow a=۳۰\underbrace{(q_۱-q_۲)}_{q'}-۳ \Rightarrow a=۳۰q'-۳ \ (۰/۲۵)$$

$$a=۳۰q'-۳+۳۰-۳۰ \Rightarrow a=۳۰q'-۳۰+۲۷ \Rightarrow a=۳۰(\underbrace{q'-۱}_{q''})+۲۷$$

$$\Rightarrow a=۳۰q''+۲۷ \Rightarrow r=۲۷ \ (۰/۲۵)$$

قضیهٔ تقسیم:

اگر a عددی صحیح و b عددی طبیعی باشد در این صورت، اعدادی صحیح و منحصر به فرد مانند q و r یافت می‌شوند به طوری که:

$$a=bq+r\ ;\ ۰\le r<b$$

مثال: اگر باقی‌مانده تقسیم عدد a بر ۴ برابر ۳ باشد، در این صورت باقی‌مانده تقسیم عدد $(۲a+۳)$ بر ۸ را به دست آورید:

$$a=۴q+۳ \xrightarrow{\times ۲} ۲a=۸q+۶ \xrightarrow{+۳} ۲a+۳=۸q+۹$$

$$\Rightarrow ۲a+۳=۸(q+۱)+۱=۸q'+۱ \Rightarrow \text{باقی‌مانده}=r=۱$$

مثال: اگر در تقسیم، مقسوم و مقسوم‌علیه، هر دو بر عدد صحیح n بخش‌پذیر باشند، ثابت کنید باقی‌مانده تقسیم نیز همواره بر n بخش‌پذیر است.

$$a=bq+r ; ۰\le r<b \Rightarrow a-bq=r$$

می‌دانیم که a، مقسوم و b مقسوم‌علیه است، لذا طبق اطلاعات سوال:

$$\begin{cases} n|a \\ n|b \xrightarrow[\text{سمت راست}]{\times q} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n|a \\ n|bq \end{cases} \xrightarrow{(-۱)} n|\underbrace{a-bq}_{r} \Rightarrow n|r$$

مثال: اگر باقی‌مانده تقسیم اعداد m و n بر ۱۷ به ترتیب ۵ و ۳ باشد، در این صورت، باقی‌مانده تقسیم عدد $(۲m-۵n)$ بر ۱۷ را محاسبه کنید.

$$m=۱۷q+۵ \xrightarrow{\times ۲} ۲m=۱۷(۲q)+۱۰$$

$$n=۱۷q'+۳ \xrightarrow{\times ۵} ۵n=۱۷(۵q')+۱۵$$

$$۲m-۵n=۱۷\underbrace{(۲q-۵q')}_{k}-۵ \Rightarrow ۲m-۵n=۱۷k-۵+۱۷-۱۷$$

$$\Rightarrow ۲m-۵n=۱۷k-۱۷+۱۲ \Rightarrow ۲m-۵n=۱۷(\underbrace{k-۱}_{k'})+۱۲=۱۷k'+۱۲ \Rightarrow r=۱۲$$

۷ — ۱/۵

مصحح شو:

سه عدد متوالی را $n, (n+۱), (n+۲)$ در نظر می‌گیریم. حال برای اثبات بخش‌پذیری عدد $n(n+۱)(n+۲)$ بر $۳!=۳\times۲\times۱$، باید ثابت کنیم که این عدد بر ۲ و ۳ بخش‌پذیر است. پس:

- بخش‌پذیری بر ۲:

$$\begin{cases} n=۲k \Rightarrow ۲|n \Rightarrow ۲|n(n+۱)(n+۲) \ (۰/۲۵) \\ n=۲k+۱ \xrightarrow{+۱} n+۱=۲k+۲=۲(\underbrace{k+۱}_{k'})=۲k' \Rightarrow ۲|n+۱ \Rightarrow ۲|n(n+۱)(n+۲) \ (۰/۲۵) \end{cases}$$

- بخش‌پذیری بر ۳:

$$\begin{cases} n=۳k \Rightarrow ۳|n \Rightarrow ۳|n(n+۱)(n+۲) \quad (۰/۲۵) \\ n=۳k+۱ \xrightarrow{+۲} n+۲=۳k+۳=۳(\underbrace{k+۱}_{k'})=۳k' \Rightarrow ۳|n+۲ \Rightarrow ۳|n(n+۱)(n+۲) \quad (۰/۲۵) \\ n=۳k+۲ \xrightarrow{+۱} n+۱=۳k+۳=۳(\underbrace{k+۱}_{k''})=۳k'' \Rightarrow ۳|n+۱ \Rightarrow ۳|n(n+۱)(n+۲) \quad (۰/۲۵) \end{cases}$$

پس نتیجه می‌گیریم که چون عدد $n(n+۱)(n+۲)$ بر ۲ و ۳ بخش‌پذیر است، بنابراین بر $۳!=۲\times۳$ نیز بخش‌پذیر است. (۰/۲۵)

افراز مجموعه $\mathbb{Z}$ به کمک قضیه تقسیم:

با توجه به قضیه تقسیم می‌دانیم که اگر a عددی صحیح و دلخواه باشد با تقسیم آن بر عدد طبیعی b، با توجه به اینکه باقی‌مانده تقسیم یعنی r در رابطه $۰ \le r < b$ صدق می‌کند، برای a برحسب r دقیقاً b حالت وجود دارد.

مثلاً در تقسیم a بر عدد طبیعی ۴، داریم:

$$a=۴q+r, r = \text{۳ یا ۲ یا ۱ یا صفر} \Rightarrow \begin{cases} a=۴q \\ a=۴q+۱ \\ a=۴q+۲ \\ a=۴q+۳ \end{cases}$$

توجه ۱: اگر $p>۳$ عددی اول باشد، آن‌گاه به یکی از دو صورت $p=۶k+۱$ یا $p=۶k+۵$ نوشته می‌شود.

توجه ۲: هر عدد صحیح و فرد مانند a، به یک از دو صورت $a=۴k+۱$ یا $a=۴k+۳$ نوشته می‌شود.

توجه ۳: مربع هر عدد فرد به صورت $(۸t+۱)$ نوشته می‌شود.

مثال: ثابت کنید اگر $p \ge ۵$ عددی اول باشد، آن‌گاه به یکی از دوصورت $p=۴k+۱$ یا $p=۴k+۳$ نوشته می‌شود.

$p=۴k \ , \ p=۴k+۱, p=۴k+۲ \ , p=۴k+۳$

در حالت $p=۴k$ و $p=۴k+۲=۲(۲k+۱)$، p عددی زوج است که با اول بودن آن تناقض دارد. بنابراین اعداد اول به فرم $p=۴k+۳$ یا $p=۴k+۱$ خواهند بود.

مثال: اگر a عددی صحیح و فرد باشد که $b|a+۲$، باقی‌مانده تقسیم عدد $(a^۲+b^۲+۳)$ را بر ۸ به دست آورید.

a عددی فرد است، بنابراین $a+۲$ عددی فرد است و چون $b|a+۲$، بنابراین b نیز عددی فرد خواهد بود. از طرفی، می‌دانیم که مربع هر عدد فرد به صورت $(۸t+۱)$ است، پس:

$$a^۲+b^۲+۳=(۸t+۱)+(۸t'+۱)+۳=۸(t+t')+۵=۸t''+۵ \Rightarrow r=۵$$

مثال: اگر a عددی صحیح و دلخواه باشد، ثابت کنید همواره یکی از اعداد صحیح a یا $a+۲$ یا $a+۴$ بر ۳ بخش‌پذیراست.

$a=۳k$

$a=۳k+۱ \xrightarrow{+۲} a+۲=۳k+۳ \Rightarrow a+۲=۳(k+۱)=۳k'$

$a=۳k+۲ \xrightarrow{+۴} a+۴=۳k+۶ \Rightarrow a+۴=۳(k+۲)=۳k''$

۸

مصحح شو:

$$۳۸=(۴\times۹)+۲ \Rightarrow \underbrace{۳۸ \overset{۴}{\equiv} ۲}_{(۰/۲۵)} \xrightarrow{\text{طرفین به توان ۲}} (۳۸)^۲ \overset{۴}{\equiv} ۴ \overset{۴}{\equiv} ۰ \quad (۰/۲۵)$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین به توان ۱۸}} \underbrace{(۳۸)^{۳۶} \overset{۴}{\equiv} ۰}_{(۰/۲۵)} \xrightarrow[+۱۹]{\text{طرفین}} \underbrace{۳۸^{۳۶}+۱۹ \overset{۴}{\equiv} ۱۹ \overset{۴}{\equiv} ۳}_{(۰/۲۵)} \Rightarrow r=۳ \quad (۰/۲۵)$$

۱/۲۵

یادگیری بیشتر:

برای هر عدد طبیعی m و هر دو عدد صحیح مانند a و b، اگر $m|a-b$، می‌گوییم « a به پیمانه m با b هم‌نهشت است» و می‌نویسیم $a \overset{m}{\equiv} b$ که این تعریف به زبان ریاضی عبارت است از:

$$\forall a,b\in\mathbb{Z}, a\overset{m}{\equiv}b \Leftrightarrow m|a-b\ (m\in\mathbb{N})$$

توجه: مجموعه همه اعداد صحیحی که باقی‌مانده تقسیم آن‌ها بر عدد طبیعی m برابر با r می‌باشد را کلاس یا دسته هم‌نهشتی r به پیمانه m می‌گوییم و با نماد $[r]_m$ نمایش می‌دهیم.

$$[r]_m=\{x\in\mathbb{Z}|x=mk+r\}$$

ویژگی‌های رابطه هم‌نهشتی:

- $a\overset{m}{\equiv}b \Rightarrow a\pm c\overset{m}{\equiv}b\pm c$
- $a\overset{m}{\equiv}b \Rightarrow ac\overset{m}{\equiv}bc$
- $a\overset{m}{\equiv}b \Rightarrow a^n\overset{m}{\equiv}b^n\ ;(n\in\mathbb{N})$
- $\begin{cases} a\overset{m}{\equiv}b \\ c\overset{m}{\equiv}d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ac\overset{m}{\equiv}bd \\ a+c\overset{m}{\equiv}b+d \\ a-c\overset{m}{\equiv}b-d \end{cases}$
- $a\overset{m}{\equiv}b, b\overset{m}{\equiv}c \Rightarrow a\overset{m}{\equiv}c$
- $a\overset{m}{\equiv}b \Rightarrow a\pm mt\overset{m}{\equiv}b\pm mk$
- $ac\overset{m}{\equiv}bc \xrightarrow{(c,m)=d} a\overset{\frac{m}{d}}{\equiv}b \xrightarrow{\text{نتیجه}} ac\overset{m}{\equiv}bc \xrightarrow{(c,m)=۱} a\overset{m}{\equiv}b$
- $a\overset{m}{\equiv}b \xrightarrow{n|m} a\overset{n}{\equiv}b$
- $a\overset{m}{\equiv}b, b\overset{n}{\equiv}c \xrightarrow{(m,n)=d} a\overset{d}{\equiv}c$

توجه: اگر باقی‌مانده تقسیم a بر m برابر r باشد، در این صورت داریم: $a\overset{m}{\equiv}r$، به عبارت دیگر: $a=mq+r \Leftrightarrow a\overset{m}{\equiv}r$

توجه: هرگاه دوعدد a و b در تقسیم بر عدد طبیعی m، هم‌باقی‌مانده باشند، داریم: $a\overset{m}{\equiv}b$

مثال: باقی‌مانده تقسیم عدد $k=(۲۷)^۷+۱۹$ را بر ۱۳ بیابید.

$$۲۷=(۱۳\times۲)+۱ \Rightarrow ۲۷\overset{۱۳}{\equiv}۱ \xrightarrow{\text{طرفین به توان}۷} (۲۷)^۷\overset{۱۳}{\equiv}۱^۷=۱\ (A)$$

$$۱۹=(۱۳\times۱)+۶ \Rightarrow ۱۹\overset{۱۳}{\equiv}۶\ (B)$$

طرفین روابط A و B را جمع می‌کنیم:

$$\underbrace{(۲۷)^۷+۱۹}_{k}\overset{۱۳}{\equiv}۶+۱ \Rightarrow k\overset{۱۳}{\equiv}۷ \Rightarrow r=۷$$

مثال: باقی‌مانده تقسیم عدد $A=(۱۰۰۰)^{۲۵}\times۹+۱۱$ را بر ۷ بیابید.

$$۱۰۰۰=(۱۴۲\times۷)+۶ \Rightarrow ۱۰۰۰\overset{۷}{\equiv}۶\overset{۷}{\equiv}-۱ \Rightarrow ۱۰۰۰\overset{۷}{\equiv}-۱ \xrightarrow{\text{طرفین به توان}۲۵} (۱۰۰۰)^{۲۵}\overset{۷}{\equiv}(-۱)^{۲۵}=-۱$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین}\times۹} (۱۰۰۰)^{۲۵}\times۹\overset{۷}{\equiv}-۹ \xrightarrow{\text{طرفین}+۱۱} (۱۰۰۰)^{۲۵}\times۹+۱۱\overset{۷}{\equiv}۲ \Rightarrow r=۲$$

۹	مصحح شو: $a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow m\mid a-b \Rightarrow \overbrace{m\mid(a-b)}^{(۰/۲۵)}(a^{n-1}+a^{n-2}b+...+b^{n-1})$ (۰/۲۵) $\Rightarrow \underbrace{m\mid a^n-b^n}_{(۰/۲۵)} \Rightarrow a^n \overset{m}{\equiv} b^n$ (۰/۲۵)	۱
۱۰	مصحح شو: $\underbrace{4a-7 \overset{10}{\equiv} 3a-5}_{(۰/۲۵)} \Rightarrow \underbrace{a \overset{10}{\equiv} 2}_{(۰/۲۵)} \xrightarrow[\text{ضرب در ۹}]{\text{طرفین}} 9a \overset{10}{\equiv} 18 \overset{10}{\equiv} 8$ $\xrightarrow[+6]{\text{طرفین}} \underbrace{9a+6 \overset{10}{\equiv} 14 \overset{10}{\equiv} 4}_{(۰/۲۵)} \Rightarrow r=4$ (۰/۲۵) یادگیری بیشتر: اگر در سوالی درباره رقم یکان یک عدد پرسیدند کافی است که باقی‌مانده تقسیم آن عدد بر ۱۰ را به دست بیاوریم. **مثال:** رقم یکان عدد $(2^{11}+7)$ را به دست آورید. $2^{10}=1024 \Rightarrow 2^{10} \overset{10}{\equiv} 4 \xrightarrow[\text{ضرب در ۲}]{\text{طرفین}} 2^{11} \overset{10}{\equiv} 8 \xrightarrow[\text{بعلاوهٔ ۷}]{\text{طرفین}} 2^{11}+7 \overset{10}{\equiv} 15 \overset{10}{\equiv} 5$	۱
۱۱	مصحح شو: عدد n رقمی $A=\overline{a_{n-1}a_{n-2}...a_0}$ را بسط می‌دهیم (۰/۲۵) ودر همنهشتی به پیمانه ۹ به جای هر توان ۱۰، عدد ۱ را قرار می‌دهیم (۰/۲۵)، داریم: $A=10^{n-1}\times a_{n-1}+...+10^2a_2+10a_1+10^0a_0$ (۰/۲۵) $\Rightarrow A \overset{9}{\equiv} 1\times a_{n-1}+...+1\times a_1+a_0$ (۰/۲۵) $\Rightarrow A \overset{9}{\equiv} a_{n-1}+...+a_1+a_0$ (۰/۲۵) یادگیری بیشتر: عدد $A=\overline{a_na_{n-1}a_{n-2}a_{n-3}...a_2a_1a_0}$ را در نظر بگیرید. ۱) این عدد را می‌توان به صورت مقابل بسط داد: $A=a_0+10a_1+10^2a_2+...+10^na_n$ ۲) باقی‌مانده تقسیم این عدد بر ۳ یا ۹ با باقی‌مانده تقسیم مجموع ارقام آن عدد بر ۳ یا ۹ برابر است. $A \overset{9}{\equiv} a_n+a_{n-1}+...+a_2+a_1+a_0 \overset{9}{\equiv} ...$ ۳) برای به دست آوردن باقی‌مانده تقسیم این عدد بر ۱۱، از سمت راست عدد، ارقام را به صورت یک در میان با هم جمع و تفریق می‌کنیم و باقی‌مانده عدد به دست آمده را بر ۱۱ به دست می‌آوریم. $A \overset{11}{\equiv} a_0-a_1+a_2-a_3+...+(-1)^na_n \overset{11}{\equiv} ...$ ۴) باقی‌مانده تقسیم این عدد بر ۱۰ یا ۲ یا ۵ با باقی‌مانده تقسیم رقم سمت راست آن عدد بر ۱۰ یا ۲ یا ۵، برابر است. $A \overset{10}{\equiv} a_0 \overset{10}{\equiv} ...$ $A \overset{2}{\equiv} a_0 \overset{2}{\equiv} ...$ $A \overset{5}{\equiv} a_0 \overset{5}{\equiv} ...$ **مثال:** الف) باقی‌مانده تقسیم عدد $A=1370040۵$ را بر عدد ۹ بیابید. $13700405 \overset{9}{\equiv} 1+3+7+0+0+4+0+5 \overset{9}{\equiv} 20 \overset{9}{\equiv} 2 \Rightarrow r=2$	۱/۲۵

ب) باقی‌مانده تقسیم عدد فوق بر ۱۱ را بیابید.

$$13700405 \overset{11}{\equiv} 5-0+4-0+0-7+3-1 \overset{11}{\equiv} 4 \Rightarrow r=4$$

پ) باقی‌مانده تقسیم عدد فوق بر ۲ را بیابید.

$$13700405 \overset{2}{\equiv} \underbrace{13700400}_{\text{بزار کنار}} + 5 \overset{2}{\equiv} 1 \Rightarrow r=1$$

مثال: باقی‌مانده تقسیم عدد $1!+2!+3!+..+500!$ را بر ۱۰ به دست آورید.

$$1! \overset{10}{\equiv} 1 ,\ 2! \overset{10}{\equiv} 2,\ 3! = 6 \overset{10}{\equiv} 6$$

$$4! = 24 \overset{10}{\equiv} 4$$

$$5! = 120 \overset{10}{\equiv} 0$$

$$6! = 720 \overset{10}{\equiv} 0$$

$$\vdots$$

$$500! \overset{10}{\equiv} 0$$

همانطور که می‌بینید از !۵ به بعد رقم یکان اعداد برابر صفر می‌شود بنابراین:

$$1!+2!+3!+\dots+500! \overset{10}{\equiv} 1+2+6+4+0+\dots+0 \overset{10}{\equiv} 13 \overset{10}{\equiv} 3 \Rightarrow r=3$$

۱۲

مصحح شو:

$$11 | 5a+9$$

$$\underbrace{5a \overset{11}{\equiv} -9}_{(0/25)} \Rightarrow 5a \overset{11}{\equiv} -9+(4\times 11) \Rightarrow 5a \overset{11}{\equiv} -9+44$$

$$\Rightarrow \underbrace{5a \overset{11}{\equiv} 35}_{(0/25)} \xrightarrow{(5,11)=1} 5a \overset{11}{\equiv} 5\times 7 \Rightarrow \underbrace{a \overset{11}{\equiv} 7}_{(0/25)}$$

$$\Rightarrow a = 11k+7\ ;\ k\in\mathbb{Z}\ (0/25)$$

۱

یادگیری بیشتر:

یک رابطه هم‌نهشتی به همراه مجهول مانند x به فرم $ax \overset{m}{\equiv} b$ را یک معادله هم‌نهشتی می‌گوییم ومنظور از حل معادله هم‌نهشتی، پیدا کردن همه جواب‌هایی چون $x_0 \in \mathbb{Z}$ است که در این معادله صدق می‌کند.

قضیه: معادله هم‌نهشتی $ax \overset{m}{\equiv} b$ دارای جواب است اگر و تنها اگر $(a,m)|b$

نتیجه قضیه: در معادله هم‌نهشتی $ax \overset{m}{\equiv} b$، اگر $(a,m)=1$ باشد، معادله همواره دارای جواب است.

توجه: اگر در معادله هم‌نهشتی، ضریب x عددی غیر از یک باشد، برای رسیدن به جواب‌های عمومی معادله ابتدا باید به کمک ویژگی‌های هم‌نهشتی، ضریب x را حذف کنیم.

مثال: آیا معادله $4x \overset{6}{\equiv} 13$ دارای جواب است؟ دلیل بیاورید.

خیر، زیرا $(4,6)=2$ ، $2 \nmid 13$

مثال: معادله هم‌نهشتی $3x \overset{7}{\equiv} 13$ را حل کرده و جواب عمومی آن را به دست آورید.

$$\begin{cases} 3x \overset{7}{\equiv} 13 \\ 13 \overset{7}{\equiv} 6 \end{cases} \Rightarrow 3x \overset{7}{\equiv} 6 \xrightarrow{(3,7)=1} x \overset{7}{\equiv} 2 \Rightarrow x = 7k+2$$

مصحح شو:

$$۹x+۱۳y=۷۲۵ \Rightarrow ۹x \overset{۱۳}{\equiv} ۷۲۵ \ (۰/۲۵)$$

توجه داشته باشد که $۷۲۵ \overset{۱۳}{\equiv} ۱۰$ ، پس:

$$\underbrace{۹x \overset{۱۳}{\equiv} ۱۰}_{(۰/۲۵)} \Rightarrow ۹x \overset{۱۳}{\equiv} ۱۰+(۲\times۱۳) \Rightarrow \underbrace{۹x \overset{۱۳}{\equiv} ۳۶}_{(۰/۲۵)} \xrightarrow{(۱۳,۹)=۱} x \overset{۱۳}{\equiv} ۴ \Rightarrow x=۱۳k+۴ \ (۰/۲۵)$$

حال، $x=۱۳k+۴$ را در معادله سیاله قرار می‌دهیم:

$$\overbrace{۹(۱۳k+۴)+۱۳y=۷۲۵}^{(۰/۲۵)} \Rightarrow ۱۱۷k+۳۶+۱۳y=۷۲۵$$

$$\Rightarrow ۱۳y=-۱۱۷k+۶۸۹ \Rightarrow y=-۹k+۵۳ \ (۰/۲۵)$$

۲۰شو

معادله سیاله:

به معادله $ax+by=c \ ; \ (a,b,c\in\mathbb{Z})$ معادله سیاله درجه اول (خطی) می‌گوییم هرگاه جواب‌های این معادله (یعنی x و y) در اعداد صحیح باشند.

توجه: شرط لازم و کافی برای اینکه معادله سیاله $ax+by=c$ جواب داشته باشد این است که: $(a,b)|c$

مثال: آیا معادله سیاله $۴x+۶y=۹$ جواب صحیح دارد؟ دلیل بیاورید.

خیر، زیرا $(۴,۶)=۲$ ، $۲\nmid ۹$

۲۰شو

حل معادله سیاله با تبدیل آن به معادله هم‌نهشتی:

ـ ابتدا معادله سیاله را به یکی از دو صورت زیر تبدیل به معادله هم‌نهشتی می‌کنیم.

$$ax+by=c \Rightarrow \begin{cases} ax \overset{|b|}{\equiv} c \\ by \overset{|a|}{\equiv} c \end{cases}$$

ـ سپس معادله هم‌نهشتی موردنظر را حل کرده و جواب به دست آمده را در معادله سیاله قرار داده و با حل آن جواب دیگر را به دست می‌آوریم.

مثال: معادله سیاله $۵x+۲y=۱۸$ را حل کنید و جواب‌های عمومی آن را بیابید.

$$۵x+۲y=۱۸ \Rightarrow ۲y \overset{۵}{\equiv} ۱۸ \xrightarrow{(۲,۵)=۱} y \overset{۵}{\equiv} ۹ \overset{۵}{\equiv} ۴ \rightarrow y=۵k+۴$$

حال $y=۵k+۴$ را در معادله سیاله به جای y قرار می‌دهیم:

$$۵x+۲(۵k+۴)=۱۸ \Rightarrow ۵x+۱۰k+۸=۱۸ \Rightarrow ۵x=-۱۰k+۱۰$$

$$\Rightarrow ۵x=۵(-۲k+۲) \Rightarrow x=-۲k+۲$$

مثال: به چند طریق می‌توان یک کیسه ۲۳ کیلویی را با وزنه‌های ۳ و ۵ کیلویی وزن کرد؟

$$\begin{cases} x = \text{تعداد وزنه‌های ۳ کیلویی} \\ y = \text{تعداد وزنه‌های ۵ کیلویی} \end{cases}$$

فقط دقت کنید که چون x و y تعداد وزنه‌ها را نشان می‌دهند بنابراین x و y اعدادی صحیح و نامنفی هستند. $(x,y\in\mathbb{W})$

لذا باید تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله سیاله $۳x+۵y=۲۳$ را پیدا کنیم.

$$۳x+۵y=۲۳ \Rightarrow ۳x \overset{۵}{\equiv} ۲۳ \Rightarrow ۳x \overset{۵}{\equiv} (۵\times۴)+۳ \Rightarrow ۳x \overset{۵}{\equiv} ۳ \xrightarrow{(۳,۵)=۱} x \overset{۵}{\equiv} ۱ \Rightarrow x=۵k+۱$$

حال $x=۵k+۱$ را در معادله سیاله قرار می‌دهیم:

$$۳(۵k+۱)+۵y=۲۳ \Rightarrow ۱۵k+۳+۵y=۲۳ \Rightarrow ۵y=-۱۵k+۲۰ \Rightarrow y=-۳k+۴$$

می‌دانیم که x و y باید صحیح و نامنفی باشند، پس:

$$\begin{cases} x\geq ۰ \Rightarrow ۵k+۱\geq ۰ \Rightarrow k\geq -\frac{۱}{۵} \\ y\geq ۰ \Rightarrow -۳k+۴\geq ۰ \Rightarrow k\leq \frac{۴}{۳} \end{cases} \xrightarrow[(k\in\mathbb{Z})]{\text{اشتراک}} \begin{cases} k=۰ \\ k=۱ \end{cases}$$

بنابراین دو روش برای انجام این کار وجود دارد.

$$k=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=۱ \\ y=۴ \end{cases} \Rightarrow (\text{یک وزنه ۳ کیلویی و ۴ وزنه ۵ کیلویی})$$

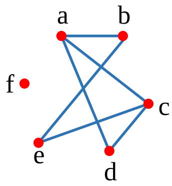
$$k=۱ \Rightarrow \begin{cases} x=۶ \\ y=۱ \end{cases} \Rightarrow (\text{۶ وزنه ۳ کیلویی و یک وزنه ۵ کیلویی})$$

۱۴

۲/۷۵

مصحح شو:

الف) گراف G را رسم می‌کنیم: (۰/۲۵)



ب) با توجه به گراف فوق داریم:

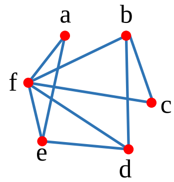
$$\begin{cases} p(G)=۶ \\ q(G)=۶ \\ \Delta(G)=۳ \\ \delta(G)=۰ \end{cases} \Rightarrow ۳p-\delta+\Delta-۲q=۱۸-۰+۳-۱۲=۹\ (۰/۵)$$

پ) $N_G[c]=\{a,e,d,c\}$ (۰/۲۵)

ت) d a b e c (۰/۲۵)

ث) a b e c d a (۰/۲۵)

ج) مکمل گراف G به صورت مقابل است. (۰/۲۵)



چ)

$$\begin{cases} q(\bar{G})=۹ \\ \sum_{i=۱}^{۶}\deg_{\bar{G}}=۲q=۱۸ \end{cases} \Rightarrow \sum\deg_{\bar{G}}+q(\bar{G})=۱۸+۹=۲۷\ (۰/۵)$$

هـ) خیر (۰/۲۵)، زیرا مثلاً از f به a مسیری وجود ندارد. (۰/۲۵)

نکته‌های مهم:

نکته ۱:

ـ به گرافی که برای یال‌های آن تعیین جهت شده باشد گراف جهت‌دار می‌گوییم.

ـ تعداد رأس‌های گراف G را مرتبه گراف G می‌گوییم آن را با $P(G)$ یا $|V(G)|$ نشان می‌دهیم.

ـ تعداد یال‌های گراف G را اندازه گراف G می‌گوییم و آن را با $q(G)$ یا $|E(G)|$ نشان می‌دهیم.

ـ به تعداد یال‌هایی که به رأس v در گراف G متصل هستند، درجهٔ رأس v گوییم و آن را با $\deg(v)$ یا $d(v)$ نشان می‌دهیم.

ـ اگر درجه یک رأس فرد باشد آن را رأس فرد و اگر درجه یک رأس زوج باشد آن را رأس زوج می‌گوییم.

ـ به رأسی که درجه آن صفر باشد (هیچ یالی به آن متصل نباشد)، رأس تنها (یا رأس ایزوله) می‌گوییم.

ـ گرافی را که تمام رئوس آن رأس تنها باشند، (هیچ یالی نداشته باشد) گراف تهی می‌گوییم.

ـ گرافی که درجه تمام رأس‌های آن با هم مساوی و برابر عدد K باشد، گراف K− منتظم می‌گوییم.

توجه: گراف فرد − منتظم از مرتبه فرد وجود ندارد.

ـ به یالی که یک رأس را به خود آن رأس وصل کند طوقه گفته می‌شود.

گراف ساده گرافی است که
- طوقه ندارد.
- یال جهت‌دار ندارد.
- بین هر دو رأس آن، حداکثر یک یال وجود داشته باشد.

ـ دو رأس u و v را دو رأس همسایه یا مجاور می‌گوییم که توسط یالی به هم وصل شده باشند.

ـ به مجموعه رأس‌هایی از گراف G که به رأس v متصل هستند، همسایگی باز رأس v می‌گوییم و آن را با $N_G(v)$ نشان می‌دهیم. حال اگر خود رأس v را نیز به این مجموعه اضافه کنیم، مجموعه‌ای به دست می‌آید که به آن همسایگی بسته رأس v گفته و آن را با $N_G[v]$ نشان می‌دهیم.

ـ دو یال را مجاور گوییم هرگاه رأسی وجود داشته باشد که هر دوی آن‌ها به آن متصل باشند.

ـ بزرگ‌ترین عدد در بین درجات رئوس گراف G را ماکزیمم درجه گراف می‌نامیم و آن را با $\Delta(G)$ نشان می‌دهیم.

ـ کوچک‌ترین عدد در بین درجات رئوس گراف G را مینیمم درجه گراف می‌نامیم و آن را با $\delta(G)$ نشان می‌دهیم.

ـ یک زیرگراف از گراف G گرافی است که مجموعه رئوس آن زیرمجموعه‌ای از مجموعه رئوس گراف G و مجموعه یال‌های آن زیرمجموعه‌ای از مجموعه یال‌های گراف G باشد.

مکمل گراف G

- آن را با G^c یا $\bar{G}$ نشان می‌دهیم.
- مجموعه رئوس مکمل گراف G همان مجموعه رئوس گراف G است.
- اگر بین دو رأس دلخواه از گراف G یالی وجود نداشته باشد، در این صورت بین همان دو رأس در گراف کامل، یک یال وجود دارد. (وبالعکس)
- اگر G یک گراف از مرتبه p و v یک رأس از آن باشد، داریم:
$$d_G(v)+d_{\bar{G}}(v)=p-۱$$
- اگر G یک گراف از مرتبه p و اندازه q باشد، داریم: $q(G)+q(\bar{G})=\frac{p(p-۱)}{۲}$

گراف کامل

- به گرافی که هر رأس آن با تمام رئوس دیگر مجاور باشد، گراف کامل می‌گوییم.
- گراف کامل p رأسی را با k_p نمایش می‌دهیم و می‌توان گفت که k_p یک گراف p رأسی و $(p-۱)-$ منتظم است.
- تعداد یال‌های یک گراف کامل p رأسی برابر است با: $q(k_p)=\frac{p(p-۱)}{۲}$
- مکمل یک گراف کامل، گراف تهی است و بالعکس.

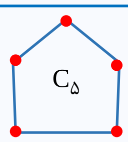
مسیر

- اگر u و v دو رأس از گراف G باشند، یک مسیر از u به v ، در G دنباله‌ای از رئوس دو به دو متمایز در G است که از u شروع و به v ختم می‌شود به طوری که هر دو رأس متوالی این دنباله در G مجاور هم باشند.
- طول یک مسیر = تعداد یال‌های موجود در آن مسیر = یکی کمتر از تعداد رأس‌های موجود در آن مسیر
- دنباله متشکل از تنها یک رأس v ، یک مسیر با طول صفر از رأس v به خودش است.
- گرافی را که تنها از یک مسیر n رأسی تشکیل شده باشد با P_n نمایش می‌دهیم. ببین:

$P_۴$

دور

- دنباله $(n \geq ۳)$; $v_۱v_۲v_۳...v_nv_۱$ از رئوس دو به دو متمایز که در آن هر رأس با رأس بعدی مجاور است را یک دور به طول n می‌نامیم.
- گرافی که تنها از یک دور n رأسی تشکیل شده باشد را با C_n نمایش می‌دهیم. ببین:



ـ گراف G را همبند می‌نامیم هرگاه بین هر دو رأس آن حداقل یک مسیر وجود داشته باشد در غیر این صورت، آن را ناهمبند می‌نامیم.

نکته ۲: اگر G یک گراف با مرتبه p و اندازه q و $V=\{v_۱, v_۲, \ldots, v_p\}$ مجموعه رئوس آن باشند، آن‌گاه:

$$\sum_{i=۱}^{p} \deg v_i = ۲q$$

نکته ۳: تعداد رأس‌های فرد هر گراف، عددی زوج است.

نکته۴: اگر G یک گراف ساده با مرتبه p و اندازه q باشد، آن‌گاه:

$$۰ \le q \le \frac{p(p-۱)}{۲}$$

مثال: یک گراف کامل ۸ رأسی چند یال دارد؟

$$q(k_۸) = \frac{p(p-۱)}{۲} = \frac{۸(۷)}{۲} = ۲۸$$

مثال: در گراف G، درجه رأس v برابر ۹ است و درجه رأس v در گراف $\bar{G}$ برابر با ۱۲ است. مرتبه گراف G را مشخص کنید.

$$\begin{cases} \deg_G(v) = ۹ \\ \deg_{\bar{G}}(v) = ۱۲ \end{cases}$$

$$\deg_G(v) + \deg_{\bar{G}}(v) = p-۱ \Rightarrow ۹+۱۲ = p-۱ \Rightarrow p = ۲۲$$

مثال: گراف کامل k_p دارای ۱۰ یال است. تعداد رأس‌های این گراف را به دست آورید.

$$q(k_p) = \frac{p(p-۱)}{۲} \xrightarrow{q=۱۰} ۱۰ = \frac{p(p-۱)}{۲} \Rightarrow p(p-۱) = ۲۰ \xrightarrow{p>۰} p = ۵$$

۱۵

مصحح شو:

$$q = ۲p - ۳ \ (۰/۲۵)$$

از طرفی:

$$\underbrace{pk = ۲q}_{(۰/۲۵)} \xrightarrow{k=۳} ۳p = ۲q \Rightarrow q = \frac{۳}{۲}p \ (۰/۲۵)$$

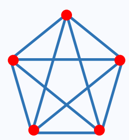
$$\Rightarrow \frac{۳}{۲}p = ۲p - ۳ \Rightarrow \frac{p}{۲} = ۳ \Rightarrow p = ۶ \ (۰/۲۵)$$

یادگیری بیشتر:

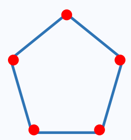
در یک گراف $k-$منتظم از مرتبه p و اندازه q، داریم: $pk = ۲q$

مثال: یک گراف ۵ رأسی غیرتهی $k-$منتظم رسم کنید به طوری که:

الف) k بیشترین مقدار ممکن را داشته باشد.



ب) k کمترین مقدار ممکن را داشته باشد.



توجه کنید که گراف فرد ـ منتظم از مرتبه فرد وجود ندارد.

۱

موفق باشید.

۲۰